Questions génératrices, questions cruciales, temps didactique, temps d'apprentissage

Se former à un enseignement des mathématiques bâti sur une dynamique d'étude par l'investigation

La question de la question : en amont de la démarche d'investigation en mathématiques

L'idée : parvenir à développer dans la classe, par l'étude et la recherche, une genèse artificielle du savoir, afin que les élèves rencontrent et éprouvent sa nécessité et sa fonctionnalité. A l'origine, disposer d'une question qui engendrera l'étude des mathématiques par la recherche de réponses ; donc ***une question génératrice***, assez large, que puissent investir (et investiguer !) les élèves.

Exemples : quelles sont les raisons d'être de la trigonométrie, les nombres, l'algèbre, l'étude des fonctions, la statistique, le triangle, les vecteurs, etc. ? Puis, transposition de la question, afin d'obtenir une question génératrice que puissent s'approprier les élèves, quitte à ce qu'elle soit reprise en plusieurs fois : « Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible ? Comment déterminer l'aire d'une surface ? », puis ***plusieurs questions du même type*** « comment déterminer la distance entre ***ces*** deux points-ci, ***ces*** deux points-là, l'aire de ***ces*** surfaces ? »

Questions génératrices et questions cruciales : exemple

Problèmes : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 3 (2) (le multiplie par 11 puis ajoute 5), puis multiplie le résultat obtenu par 7 (élève au carré) . Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 (soustrait 2) (par 4) puis (élève au carré et) ajoute 6 (8) (9) au résultat . À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

$(x+3)\times 7=2x+6$ $S = \{-3\}$ $(x+2)^2=(x-2)^2+8x$ $S = \mathbb{R}$ $11x\ 5=4x+9$ $S = \{4/7\}$

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		-28	-17	-6	5	16	27	38	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		-3	1	5	9	13	17	21	
Ecart *A* - *B*		-25	-18	-11	-4	3	10	17	

Questions génératrices et questions cruciales : exemple (suite)

1. Comment faire pour trouver la solution en s'en rapprochant jusqu'à l'atteindre ?

   On teste avec 0,1 ; 0,5 ; 0,9 Premier résultat partiel : la solution est entre 0,5 et 0,6. On calcule avec un pas de 1/100^e^ : la solution est entre 0,57 et 0,58… Etc. On passe au tableur. L'idée que la solution n'est peut-être pas décimale… semble confirmée par le tableur avec des pas de plus en plus petits ($0,\underline{571428}57…$) Nécessité d'une méthode donnant la solution

2. On constate que l'écart (la différence) diminue ; jusqu'à combien va-t-il diminuer ? À quoi sera égale la différence lorsqu'on aura trouvé la solution ?

   On rencontre comme une nécessité $(a - b = 0) \Leftrightarrow (a = b)$

3. Peut-on trouver la valeur qui rend la différence nulle ? Nécessité du passage à l'écriture algébrique de la différence : $11x+5 - (4x+9)$

4. Comment simplifier cette expression ? Si on ne sait pas, nouvelle recherche

5. Peut-on être sûr que la valeur trouvée est la bonne ? Que c'est la seule ?

6. Peut-on trouver une méthode plus rapide ?

Un exemple dans un manuel de 4e

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

b. Reproduire le tableau ci-contre et le compléter.

c. Observer ce tableau et conjecturer entre quels nombres entiers consécutifs se trouve une solution de l'équation.

d. Donner des valeurs à x comprises entre ces deux nombres entiers et trouver un nombre décimal solution de l'équation.

e. Le nombre trouvé convient-il pour la situation imaginée au **a.** ?

	A	B	C
1	x	$7x+3$	$2x+15$
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

3 Solution accessible ?

On considère l'équation $11x + 5 = 4x + 9$.
Avec la calculatrice ou un tableur, procéder comme à l'activité précédente pour tenter de trouver une solution de cette équation. Qu'en pensez-vous ?

Égalités et opérations

4 Conjecturer, puis démontrer

a. Adrien et Bénédicte ont le même montant d'économies.
Que peut-on dire des économies de chacun de ces enfants lorsque :

- chacun économise 6 € de plus ?
- chacun triple ses économies ?
- chacun dépense 10 € ?
- chacun conserve le quart de ses économies ?

b. a et b désignent deux nombres égaux : $a = b$.
c désigne un nombre relatif.

- Réduire, puis calculer la différence $a + c - (b + c)$.

Recopier et compléter : « si $a = b$, alors ... ».

- Factoriser, puis calculer la différence $ac - bc$.

Recopier et compléter « si $a = b$, alors ... ».

Le saviez-vous ?

- Si deux nombres sont égaux, alors leur différence est nulle.
- Si la différence de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont égaux.

5 Premières applications

Dans chaque cas, x désigne un nombre relatif tel que l'égalité écrite à gauche soit vraie.
Recopier et compléter.

a. $x - 7 = 11$ → On ajoute ... aux deux membres de l'égalité. → $x = ...$

b. $x + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$ → On ... ... aux deux membres de l'égalité. → $x = ...$

c. $2x = x + 9$ → On ... ... aux deux membres de l'égalité. → $x = ...$

d. $3x = 8{,}4$ → On ... par ... les deux membres de l'égalité. → $x = ...$

e. $-\frac{x}{4} = 7$ → On ... par ... les deux membres de l'égalité. → $x = ...$

Démarche d'investigation, problèmes, activités

- Dans une DI, ***l'étude est à faire*** ⇒ questionnement ⇒ ***recherche de solution*** par les élèves et sous la direction du professeur

- Dans un problème de fin de chapitre, l'étude a ***été rédigée*** (par le professeur) de façon ***lacunaire*** ⇒ étude supposée ***déjà faite*** ⇒ travail de l'élève = ***combler les lacunes***

- Beaucoup des activités proposées par les manuels et utilisées en classe sont des ***exposés*** lacunaires ***de solutions*** comme c'est le cas de l'énoncé d'un problème

- Pour diriger une DI en mathématiques, il est nécessaire de procéder au préalable à une ***analyse mathématique et didactique*** de laquelle émergent les questions cruciales. Les questions cruciales sont ***l'outil principal de la direction d'une DI en mathématiques.***

Temps didactique, temps d’apprentissage

- Pour qu’un savoir soit ***enseignable*** il faut qu’il ne soit plus inséré dans le réseau des problématiques et problèmes qui lui donnent un sens complet, et qu’il devienne celui d’une communauté et non plus d’une personne ; c’est la ***mise en texte du savoir*** (traités (Éléments), programmes, instructions, manuels, cours magistraux)

- Mise en texte du savoir ⇒ rapport savoir / durée.

- L’enseignant relance l’horloge en introduisant des objets de savoir. Il maintient une avance chronologique entre temps de l’enseignement et temps de l’apprentissage, créant ***la fiction d'un temps didactique unique***.

Temps didactique, temps d'apprentissage et DI en mathématiques

- La question du temps didactique devient celle de la manière d'introduire des objets nouveaux (ostension directe ou déguisée ? questionnement ?)

- Dans une DI en mathématiques, c'est à l'aide d'une liste de ***questions cruciales*** que le professeur dirige la DI et que les élèves rencontrent des mathématiques qui, souvent, ne peuvent se dire dans l'ordinaire des classes (ce qui fait « qu'on sait faire des maths »). Le rôle du professeur devient celui d'aide des élèves pour progresser dans le processus de ***production*** de la réponse attendue et de proclamation de sa conformité au savoir (institutionnalisation)

- Il lui faut alors ***apprendre à poser des questions cruciales***, et, peu à peu, à faire que la classe et chaque élève apprennent à ***(se) poser*** de telles questions et ***à y répondre***.