N°267 – DUCHENE Eric

UNE ACTION « MATHS À MODELER » AU CIES DE GRENOBLE

L'atelier de monitorat « maths à modeler » s'inscrit dans la perspective plus vaste des travaux de l'Equipe Recherche Technologie éducation « maths à modeler », dont le noyau fédérateur est l'équipe « Combinatoire Naïve et Apprentissage des Savoirs » (CNAM) du laboratoire Leibniz de Grenoble.

« Maths à modeler » vise à étudier les mathématiques discrètes comme un outil de formation pédagogique, au travers de situations de recherche pour les élèves, ou de manifestations de vulgarisation scientifique pour le grand public. La démarche de « Maths à modeler » est originale, en cela que l'étude didactique des situations de recherche montre la mise en œuvre de notions transversales au savoir (notions de modélisation, preuve, définition). De tels concepts abstraits sont difficiles à transmettre par les voies traditionnelles de l'enseignement. « Maths à modeler » propose donc une alternative aux approches classiques d'étude de l'apprentissage des concepts, en se basant sur les situations de recherche en mathématiques discrètes, envisagées du triple point de vue mathématique, épistémologique, et didactique (quels savoirs, quels rapports au savoir, quelle gestion des situations par l'enseignant).

Depuis deux ans, cette équipe travaille avec le CIES de Grenoble, qui s'occupe de la formation des moniteurs (doctorants occupant un service d'enseignement à l'université). Lors de leur stage de troisième année, cinq moniteurs ont choisi d'intégrer l'équipe « maths à modeler » et interviennent dans **deux classes de 6ème** des collèges international de Grenoble et de La Roche sur Foron.

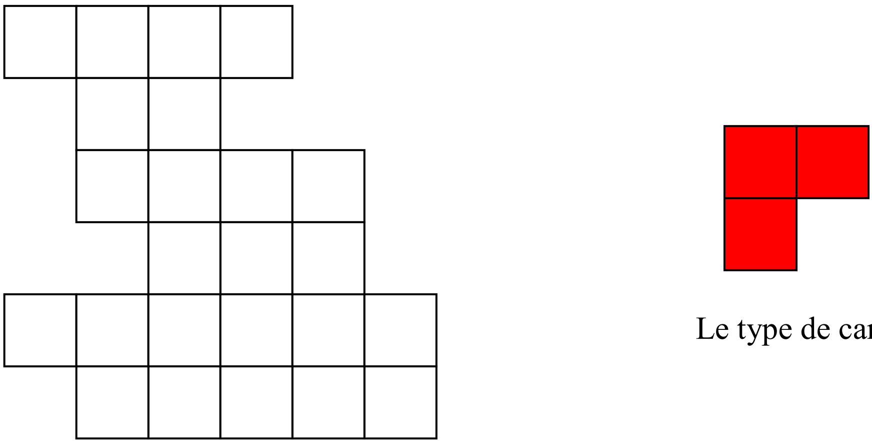
Les moniteurs présentent aux élèves une situation de recherche issue de problèmes actuels en mathématiques discrètes. La forme est **ludique**, et peut utiliser des supports matériels. Aucun prérequis n'est nécessaire. Le problème est présenté dans un contexte général, puis on propose aux élèves d'y réfléchir sur des cas plus restreints, d'où ils peuvent extraire plusieurs résultats à leur portée. On prend soin de laisser la plus grande liberté aux élèves dans leurs démarches. L'obligation de résulat n'est pas privilégiée. Les situations proposées mettent souvent l'accent sur les notions de preuve, conjecture, induction, exemple, contre-exemple…Les problèmes choisis cette année s'intitulent « Le carrelage de la cuisine » et «La course aux allumettes ».

A la fin des interventions, les deux classes sont venues présenter les résultats de l'activité lors d'un séminaire « junior » au laboratoire Leibniz, réunissant les élèves, parents d'élèves, moniteurs, et chercheurs en mathématiques discrètes.

Un exemple de problème : « Le carrelage de la cuisine »

Ce jeu a été choisi pour une classe de 6ème du Collège International d'Europole. Voici comment nous l'avons décrit aux enfants lors de la première séance :

On considère une cuisine vue « de dessus », découpée en petits carrés. Voici un exemple (figure de gauche) :

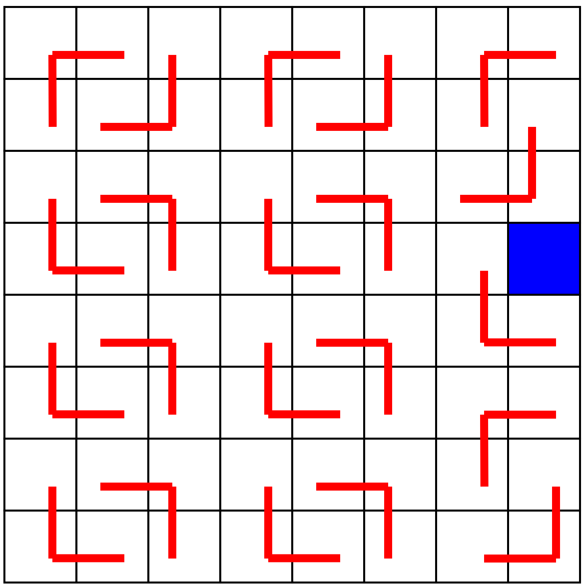


La cuisine

Le type de carrelage

On souhaite poser du carrelage sur l'ensemble de notre cuisine. Pour cela, on se rend chez le carreleur qui ne nous propose qu'un seul type de motif : celui de la figure de droite ci-dessus. La question que l'on se pose est la suivante : « est-il possible de carreler toute notre cuisine avec ce motif ? ».

Dans le cas d'une cuisine tout à fait quelconque, on dit aux enfants que même les chercheurs ne savent pas résoudre ce problème. On leur proposer alors d'y réfléchir sur une cuisine à forme carrée ou rectangulaire.
Pour commencer, on donne alors aux enfants des plateaux en bois carrés de taille 7*7 et 8*8.

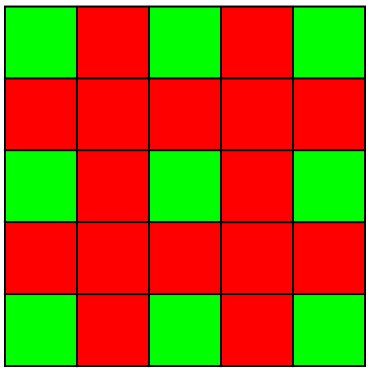


Sur une cuisine 8*8

Dans ces deux cas, il reste toujours « un trou » dans la cuisine : en effet, le nombre de cases nécessaires pour carreler toute la cuisine doit être un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas pour les tailles que nous avons choisies. On donne alors aux enfants un morceau de carrelage spécial (un petit carré bleu) pour pouvoir compléter la cuisine. Le nouveau problème devient alors le suivant : sur quelles cases peut-on placer le petit carré bleu pour que le carrelage de la cuisine soit complet ?

Dans le cas des cuisines 7*7 et 8*8, le carré bleu peut être placé n'importe où. En utilisant des arguments de symétrie et de rotation, on restreint considérablement le nombre de cas à tester. Par ailleurs, on montre aussi que pour tous les carrés dont le coté est une puissance de 2, on peut mettre le petit carré n'importe où, il existe toujours une façon de carreler la cuisine entièrement. La preuve se fait par induction sur la taille du carré.

On passe ensuite à la cuisine 5*5, qui nécessite elle aussi un carré spécial. Pour cette taille, si on place le carré bleu sur certaines cases, il n'est pas possible de carreler la cuisine entièrement. Le schéma suivant indique les endroits où ça marche (en vert), et ceux pour lesquels ce n'est pas possible (en rouge) :



Cette taille de cuisine est intéressante, puisque les enfants n'avaient pas encore été confrontés aux cas impossibles. Les preuves de l'impossibilité sont d'ailleurs les plus difficiles pour eux. Dans ce cas précis, on utilise des preuves par « forçage » jusqu'à tomber sur un blocage.

On a conclu en les faisant réfléchir sur des cuisines rectangulaires de longueur *n* et de largeur 2 ou 3. Selon la valeur de *n* modulo 2 ou 3, les carrelages sont possibles ou impossibles.

En les faisant réfléchir sur ces situations, on met le doigt sur plusieurs « concepts » mathématiques sous-jacents :

- conservation de l'aire (il restera toujours un trou, quelle que soit la disposition du carrelage)
- arguments de symétrie (pour réduire le nombre de carrelages à construire)
- preuve par induction (pour les carrés dont le côté est un multiple de deux)
- preuve par forçage (dans le cas du 5*5 et des bandes 2*n)
- abstraction du *n*, notions de modulo 2 et 3…

Modalités de l’intervention en classe

Avant d’intervenir pour la première séance, nous avons rencontré les professeurs concernés afin de discuter avec eux des modalités de nos interventions.
Les élèves sont répartis en groupes de 4 ou 5, souvent par affinités. Certains s’avèreront très concernés et efficaces dans leurs recherches, d’autres seront naturellement plus dispersés. Les professeurs ne sont pas mis au courant des jeux que nous allons présenter aux élèves. Cet aspect important correspond au credo de l’équipe « maths à modeler ». Dans ce type d’activité, le professeur n’est plus celui qui possède le savoir et qui le transmet aux élèves. Il intervient rarement et est amené à réfléchir au problème en même temps qu’eux.
Par ailleurs, notre rôle n’est pas de prendre la place du professeur ; nous tenons bien à préciser aux enfants que nous ne savons pas résoudre de nombreux problèmes liés aux jeux qu’on leur propose.
L’objectif est de les mettre dans le rôle de « vrais » chercheurs, où ils mènent eux-mêmes leurs propres investigations. Si certains proposent des variantes du problème étudié, elles sont les bienvenues et il est important de les laisser partir dans des directions auxquelles nous-mêmes n’avions pas pensé. La façon de travailler est différente de celle à laquelle ils peuvent être habitués.
Le déroulement d’une activité sur six séances ressemble souvent à cela (exemple du carrelage de la cuisine) :

Séance 1 : prises de contacts
Objectifs :
- Introduction du jeu.
- Familiarisation avec le jeu et les questions qu’il soulève.
- Argument de dénombrement pour l’introduction de la pièce de carrelage supplémentaire.

Séance 2 : une démarche scientifique.
Objectifs :
- Jeu sur des plateaux de différentes tailles, dans différentes situations.
- Expliquer, argumenter, justifier les « ça marche » ou « ça ne marche pas ».
- Utiliser la géométrie du problème.

Séance 3 : diviser pour régner
Objectif : initiation à la récurrence : traiter le cas 8-8 grâce au cas 4-4, en généralisant la démarche du passage du 4-4 au 2-2.

Séance 4 : certificat de non-réalisabilité.
Objectif :
- Raisonnement par « forçage » pour montrer non-réalisabilité de certains plateaux 5*5.
- Cas 2*n et 3*n.

Séance 5 : bilan et préparation du séminaire
Objectifs :
- Faire le point et construire la présentation.
- Rédaction de transparents comme support du discours.

Séance 6 : répétition générale
Objectifs :
- Répétition finale « en conditions »

Le séminaire « junior »

Il s'agit en quelque sorte du clou de l'atelier. Pour mettre en valeur les résultats obtenus par les élèves, nous avons organisé un séminaire pour permettre aux élèves d'exposer leurs travaux devant un large public. Ce séminaire regroupait 3 classes : la classe de 6ème 2 du collège International de Grenoble et la classe de 6ème B du collège de La Roche-sur-Foron, dans le cadre du monitorat, ainsi qu'une classe du collège de Jules Flandrin de Corenc dans le cadre d'une autre action de l'équipe Maths à Modeler. Les exposés se sont déroulés à l'amphithéâtre Gosse de l'INPG le Vendredi 16 Décembre de 14h00 à 16h00.

De manière générale, les élèves sont souvent très heureux de venir participer à ce type de regroupement. Cependant, cette expérience leur a montré qu'une présentation engendrait du stress difficile à gérer, et pouvant gêner le raisonnement devant du monde. Enfin, la séance de questions a permis aux élèves de finir sur un point positif à l'aide de Sylvain Gravier et de leur professeur de Mathématiques.

A l'issue des exposés, l'ensemble des participants est conviée à un goûter. Quelques jeux sont disposés dans un coin du hall pour que les élèves puissent mettre en pratique les jeux présentés par les autres classes. Pour une grande majorité, les élèves sont soulagés et satisfaits de leur première expérience d'exposé devant un public nombreux.

Les impressions des élèves

Environ un mois après le « Séminaire Junior », nous avons décidé de faire remplir aux élèves un questionnaire. Celui-ci se compose de 6 questions fermées et de 2 questions ouvertes. Nous vous présentons ici les réponses formulées par les élèves du collège International.

A Vous souvenez-vous du jeu « le carrelage de la cuisine » ?

Pas du tout	*Un peu*	*A moitié*	*Beaucoup*	*Parfaitement*
3%	0%	3%	39%	55%

B Le jeu du « carrelage de la cuisine » vous a-t-il semblé :

Inintéressant	*Peu Intéressant*	*Bof*	*Intéressant*	*Très Intéressant*
3%	7%	28%	52%	10%

C Le jeu du « carrelage de la cuisine » vous a-t-il semblé :

Trop Facile	*Facile*	*Ni Facile Ni Difficile*	*Difficile*	*Trop Difficile*
7%	16%	67%	7%	3%

D Avez-vous eu l'impression d'avoir fait des mathématiques au cours du jeu :

Pas du tout	*Un peu*	*Normal*	*Beaucoup*	*Enormément*
27%	54%	16%	0%	3%

E Avez-vous expliqué le jeu à vos parents :

Oui	*Non*
67%	33%

F Aimeriez-vous recommencer ce genre d'activité l'année prochaine ?

Oui	*Non*
96%	4%

Nous constatons dans l'ensemble que les élèves ont gardé un bon souvenir de cette expérience et ont pris le temps de l'expliquer à leurs parents : presque tous, d'ailleurs, sont prêts à retenter l'aventure l'année prochaine! Par contre un nombre assez important d'élèves ont trouvé le jeu un peu trop facile : parmi les critiques formulées dans les questions ouvertes, certains (10%) ont déploré le fait que les séances étaient un peu trop répétitives sur la fin. D'autres (10%) ont trouvé les séances de recherche un peu trop bruyantes. Cependant, malgré les 2 séances complètes de préparation de l'exposé et une répétition supplémentaire, 30% des élèves ont trouvé le séminaire difficile. Faire parler les élèves devant un public nombreux est l'un des objectifs majeurs d'une telle activité.

Parmi les points appréciés par les élèves, le fait de remplacer un cours de maths conventionnel par faire des maths en s'amusant tient le premier rang. En effet, les séances se déroulaient à la fin d'une journée : ce choix horaire a plu. D'autre part, 35% des élèves ont trouvé stimulant le travail de groupe et l'ambiance « sympa » des séances en classe. Une bonne partie a également apprécié la journée du séminaire : certains pour le goûter, d'autres pour le fait d'avoir appris à se servir de transparents ou pour l'expérience de parler en public.