N°263 - DURAND-GUERRIER Viviane

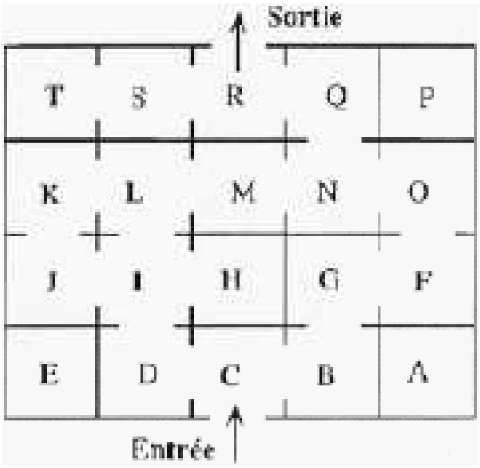
VOUS AVEZ DIT LOGIQUE ?

Il est fréquent de considérer que la logique formelle qui gouverne le raisonnement mathématique s'oppose de manière radicale à la logique de sens commun, et qu'elle doit, par conséquent, être construite contre cette dernière. Or, toute l'histoire de la logique, depuis Aristote, montre au contraire un souci constant de trouver un équilibre entre la nécessité de rester au plus près des modes de raisonnements ordinaires tout en construisant des systèmes permettant d'en établir la validité. Ceci est particulièrement clair lorsque l'on s'intéresse à une logique des termes, qui prend en compte les objets, les propriétés et les relations, ainsi que les questions de quantification (tous, quelques, aucun) par opposition à une logique des propositions qui s'intéresse aux seules valeurs de vérités des énoncés clos.
La situation que je présente ci-dessous est particulièrement révélatrice d'un phénomène didactique répandu dans la classe de mathématiques qui consiste à choisir pour les énoncés une interprétation qui préserve la dichotomie entre le vrai et le faux même lorsque celle-ci n'est pas *a priori* la plus pertinente.

I. Présentation de la situation du labyrinthe

Il s'agit d'une tâche proposée dans le cadre d'une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de seconde, dont les résultats sont publiés dans APMEP (1992). *Le labyrinthe* est le premier exercice d'une série de six exercices spécialement destinés à observer la façon de raisonner des élèves et la façon dont ils s'expriment par écrit. Dans la présentation, les auteurs insistent sur l'importance de la rédaction de la solution, la justification soignée des réponses, et préviennent les élèves que « *certaines questions pourront sembler différentes de ce qu'ils ont l'habitude de faire* ». Le contexte général de l'épreuve et son but (l'amélioration des conditions d'enseignement) étaient également indiqués aux élèves. Cette situation est décrite et analysée de manière très détaillée dans Durand-Guerrier (1999) sous le titre : *L'élève, le professeur et le labyrinthe.* Nous présentons ici la tâche telle qu'elle a été donnée aux élèves, les résultats obtenus et nos commentaires

L'exercice se présentait ainsi :



Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte. Les pièces sont nommées A, B, C… comme il est indiqué sur la figure. Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE. En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

Avant de lire ce qui suit, je vous invite à répondre pour vous même aux questions posées en observant les arguments que vous utilisez pour cela.

2. Une résolution empirique

La résolution de la tâche peut se faire aisément avec des arguments empiriques. Dans cette situation, la phrase n°1 est nécessairement fausse ; en effet comme P n'a pas de porte, il est impossible que la personne X soit passé par P. Pour la phrase n°2, elle est nécessairement vraie car on ne peut pas sortir sans passer par cette porte, ce que l'on peut contrôler soit en remontant à partir de la sortie, soit en listant tous les trajets possibles. Pour la phrase n°3, la réponse est « on ne peut pas savoir » puisqu'en effet on peut passer par M pour sortir, mais on peut également sortir sans passer par M. La phrase n°4 est vrai, en effet O possède exactement deux portes, dont l'une communique avec F (rappelons que l'on ne peut pas passer deux fois par la même porte) ; la phrase n°5 est vraie pour une raison similaire. Concernant la phrase n°6, comme la pièce L a trois portes, il pourrait y avoir des chemins permettant de sortir en empruntant L et K, mais également de tels chemins empruntant L sans emprunter K, ce que l'on vérifie aisément. Par conséquent, pour cette phrase, comme pour la phrase n°3, un raisonnement empirique conduit à répondre « on ne peut pas savoir ». C'est la réponse fournie par la majorité des élèves. Nous avons examiné cinquante et une copies d'élèves ayant participés à cette évaluation. Parmi celles-ci, on trouve tente-trois fois la réponse « on en peut pas savoir », avec des arguments empiriques corrects ; par exemple « on ne peut pas savoir car il a pu passer soit par DILM, ou par DIJKLM » ; ou encore « la phrase n°6 n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K, mais X a aussi pu passer par I, pièce qui communique directement avec L, évitant le passage par K. »

Les réponses des élèves montrent qu'ils reconnaissent que l'énoncé est satisfait par certains chemins mais pas par tous ; en particulier,ils reconnaissant que la présence de la lettre L sans la présence de la lettre K rend l'implication correspondante fausse, tandis que la co-présence des deux lettres rend l'implication vraie.

3. Un désaccord entre élèves et professeurs

La réponse attendue par les auteurs de l'évaluation est que la phrase numéro 6 est fausse. C'est peut-être aussi la réponse que vous avez donnée. Pour les auteurs, la phrase est fausse car ils considèrent qu'il s'agit d'un énoncé général comme le montre cette citation : *"S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des assertions."*. Or, comme nous l'avons dit la majorité des élèves répondent « on ne peut pas savoir », En effet, seuls 29% des élèves déclarent que la phrase n° 6 est fausse. Et ce qui étonne les professeurs, c'est que ce sont surtout les bons élèves qui proposent cette réponse.

On retrouve également ceci avec des étudiants plus avancés mais de façon moins nette. Cette situation du labyrinthe a été reprise par Rogalski & Rogalski (2004) dans le cadre d'une recherche concernant les modes de raisonnement des étudiants préparant le CAPES. Ils nous ont communiqué les résultats concernant cet item. Dans leur échantillon, qui comprend 178 étudiants sur deux années, 94 ont donné comme réponse « on ne peut pas savoir » pour la question 6, soit un peu plus de 52%, ce qui corrobore ce que nous avons observé dans nos formations : les étudiants et les professeurs stagiaires sont plus enclins à donner la réponse « on ne peut pas savoir », que les enseignants chevronnés. Néanmoins, y compris dans les stages de formation continue d'enseignants du second degré ou dans la formation des moniteurs du CIES (Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur), cette situation laisse toujours émerger un désaccord sur la valeur de vérité de la phrase n°6. Ceci n'est évidemment pas pour nous étonner puisqu'en effet, les arguments empiriques conduisent tout naturellement à cette réponse

4. Des arguments logiques

L'argument des professeurs pour choisir la réponse fausse renvoie à la distinction faite par Bertrand Russell entre implication matérielle, qui relie deux propositions singulières et implication formelle universellement quantifiée. On peut expliciter cette distinction sur la phrase n°6 « Si X est passé par L, alors X est passé par K ».

Une première interprétation consiste à considérer que X est un nom propre, le nom d'une personne ayant traversé ayant traversé le labyrinthe, et que l'on aurait aussi bien pu appeler Pierre ou Nadia. Dans ce cas, on a deux propositions singulières articulées par le connecteur « si, alors » ; c'est une implication matérielle ; sa valeur de vérité dépend uniquement de la valeur de vérité des propositions élémentaires qui la compose . Comme celui qui doit répondre à la question ne connaît pas le trajet de X (de Pierre ou de Nadia), il ne peut pas savoir puisqu'en effet certains trajets rendent faux l'implication matérielle, tandis que d'autres la rendent vraie. C'est la position d'une majorité d'élèves, de certains étudiants et enseignants et c'est aussi la mienne.

Une deuxième interprétation consiste à considérer que X est une variable universellement quantifiée de manière implicite. Autrement dit un énoncé de la forme « Pour tout X, si X est passé par L, alors X est passé par K », ce qui correspond à une forme de nécessité. Dans ce cas-là, l'énoncé ayant un contre-exemple, il est faux. C'est la position des auteurs,de nombreux enseignants et de certains étudiants. Notons d'ailleurs que la quantification porte alors plutôt sur les trajets que sur les personnes, en effet la réponse faux suppose que tous les trajets possibles soient empruntés, ce que l'on ne pourrait pas affirmer pour une population donnée sans connaître les trajets.

J'ai montré par ailleurs (Durand-Guerrier, 1999) qu'une formalisation dans le calcul des prédicats conduit également à répondre « on ne peut pas savoir ». En effet, dans cette situation, il est cohérent de considérer que la phrase n°6 est un cas de l'implication ouverte

« si un trajet *t* passe par la porte L, alors ce trajet passe par la porte K ». Comme cette implication a, parmi les trajets qui permettent de sortir, au moins un exemple (un trajet qui passe par L et par K) et un contre exemple (un trajet qui passe par L et qui ne passe par K), on ne peut pas savoir quelle est la valeur de vérité de ce cas particulier de l'implication ouverte, sans information supplémentaire. Cette interprétation de la lettre X comme désignant un individu singulier, et non pas une variable dans le champ d'un quantificateur universel, conduit également à répondre « on ne peut pas savoir » pour la phrase n°3, ce qui est bien la réponse attendue par ceux qui ont proposé cette situation dans le cadre d'EVAPM2. Pour les autres phrases, il est clair que ces questions ne se posent pas puisque soient les énoncés universels sont vrais (phrases n° 2, 4 et 5), soit faux (phrase n°1), et donc on peut se prononcer sur la valeur de vérité des phrases singulières sans connaître le trajet.

5. Conséquences didactiques

L'analyse dans le calcul de prédicats montre qu'aucune interprétation logique de la lettre X ne permet de répondre de manière cohérente à la fois : « on ne peut pas savoir » pour la phrase n°3, et « la phrase n°6 est fausse ». Cette réponse s'explique par la pratique de la quantification implicite des énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques, qui conduit à interpréter tout énoncé conditionnel comme un énoncé général. Ce que montrent les différents résultats, c'est que cet implicite n'est pas partagé par des nombreux élèves et étudiants, et que d'autre part, dans certains cas, ceci peut-être non pertinent. On retrouve dans d'autres situations ce désaccord entre élèves et professeurs sur la question de la valeur de vérité des énoncés, selon que l'on considère ces énoncés comme généraux, ou comme singulier. En l'absence d'un marqueur explicite de généralisation, pour le professeur, c'est le contexte qui doit permettre de déterminer dans quelle situation, on se trouve. Cependant, comme nous le rappelle l'exemple du labyrinthe, ce contexte est loin d'être toujours transparent. D'autre part, lorsqu'on se trouve en situation de résolution de problème, il est fréquent que l'on soit en face d'énoncés pour lesquels on ne peut pas se prononcer sur leur valeur de vérité ; c'est d'ailleurs ce qui nous conduit à poursuivre la recherche. Considérons par exemple la situation classique suivante. On étudie les propriétés d'un quadrilatère ABCD obtenu par construction dans le cadre d'un problème. Au cours de la résolution du problème, on a établi le résultat suivant : Le quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires. On s'interroge pour savoir s'il s'agit d'un losange. Faut-il répondre *non* au motif que certains quadrilatères ayant des diagonales perpendiculaires sont des losanges et d'autres non ? Évidemment non ; on va considérer précisément que l'on ne peut pas savoir à ce stade, et qu'il faut poursuivre les investigations. Notons d'ailleurs que pour un certain nombre d'élèves et même d'étudiants, la réponse pourrait être *oui*, car les seuls quadrilatères à diagonales perpendiculaires qu'ils connaissent sont les losanges (voir Durand-Guerrier, 1999).

6. Conclusion

Dans la classe de mathématiques, les questions de quantification sont le plus souvent cachées et il est usuel de dire qu'en mathématiques un énoncé est soit vrai, soit faux, si bien que tout se passe comme si l'on ne manipulait en mathématiques que des énoncés clos, alors qu'une part importante du travail mathématique concerne l'étude des objets mathématiques et de leurs propriétés, qui s'expriment par des phrases ouvertes comme, par exemple, « *x est un nombre premier* », (où x est une lettre de variable), satisfaites par certains éléments, et non satisfaites par d'autres éléments. En résolution de problèmes, on travaille le plus souvent au niveau des objets et de leurs propriétés et l'on manipule principalement des énoncés singuliers. Lorsqu'un énoncé singulier est une instance d'un énoncé universel vrai, on peut se prononcer sur sa valeur de vérité sans revenir aux objets ; sinon, il faut réexaminer les objets et leurs propriétés. Ce deuxième cas est favorable aux apprentissages mathématiques (on trouve des exemples dans Durand-Guerrier,2006). Un autre résultat et non des moindres est que la prise en compte des questions de quantification permet de reconsidérer la question de la rationalité des élèves et de réduire la distance entre logique de sens commun et logique mathématique ; ceci est en accord avec le point de vue Gardies (1994) concernant les fondements sémantiques du discours naturel.

Références :

A.P.M.E.P. *Publication n°88 : EVAPM91/2. Evaluation des programmes de mathématiques Seconde 1991,* (1992)

V. DURAND-GUERRIER, "L'élève, le professeur et le labyrinthe", Petit X, Vol 50, p.57-79, (1999).

V. DURAND-GUERRIER, V , Vers un socle commun en mathématiques. Quelques pistes de réflexion, à paraître dans le *Bulletin Vert de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, n° 463, mars-avril 2006,

J.L. GARDIES "Les fondements sémantiques du discours naturel", Vrin : Paris, (1994).

J. ROGALSKI, & M. ROGALSKI, (2004) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol.9,* Actes du colloque Argentoratum de juillet 2002, 175-203.

B. RUSSELL, "Ecrits de logique philosophique", PUF: Paris, (1989).