N°208 - BOYER Catherine, NUMA-BOCAGE Line

HETEROGEITE DES CONCEPTUALISATIONS DE LA NUMERATION EN COURS PREPARATOIRE

A l'entrée au CP, les élèves disposent d'un rapport personnel à la numération. En quoi ce niveau de conceptualisation influe-t-il sur le développement de leurs compétences? Il s'agit de repérer et de comprendre les formes d'hétérogénéité de niveaux entre élèves, puis d'étudier son évolution au vue de la complexité des compétences en jeu dans l'appropriation de la numération. Nous avons suivi deux classes (ZEP ; non ZEP)[1], observé des séances portant sur la numération, en différenciant les élèves: faibles, moyens et forts tel que les enseignantes les ont repérés en début d'année.

S'il est plus facile d'identifier les « bons » comme ceux qui réussissent sur « tout » et les élèves « faibles » en échec sur de très nombreux champs (mais pas forcément tous !) il est toujours plus difficile d'identifier pourquoi un élève est « moyen ». La méthodologie employée dans cette étude, nous permet d'apporter des éléments de description du profil d'un élève « moyen ».

Présentation de l'épreuve et références théoriques:

Se poser la question des formes que recouvre l'hétérogénéité de conceptualisation du nombre appellent des références constructiviste-développementale de la numération (Piaget 1941, Fuson 1991, Vergnaud 1994, Brousseau 1995) et de la théorie de la représentation (Vergnaud).

En s'appuyant, en autres sur ces différents auteurs, nous avons construit une épreuve individuelle soumise en début (T1) et fin d'année (T2) de CP dans 2 classes de la région parisienne (ZEP et non-ZEP).

Cette épreuve de 126 items repose sur cinq champs relevant de la construction du nombre, la variable numérique ayant un empan ne dépassant pas « vingt » sauf pour deux items:

- « **énoncer la suite numérique** » (champ 1) ; les travaux de Fuson (1991) insistent sur le rôle du comptage et sur l'aspect ordinal dynamique de la chaîne flexible.
- **« dénombrer une collection discrète** » (champ 2) recouvre l'aspect cardinal du nombre. Le statut du dernier mot nombre prononcé (Gelman & Gallistel, 1972), la nature des objets et leur organisation spatiale (Brousseau 1995) ainsi que l'invariance du cardinal sont des éléments cruciaux pour comprendre les procédures des élèves.
- « **comparer des collections discrètes** » (champ 3) ; la quantification des collections et la comparaison des mots nombres obtenus est la procédure la plus experte (Brousseau 1995).
- « **résoudre un problème** » (champ 4 subdivisé en 4a : « résoudre un problème additif » et 4b « résoudre un problème de comparaison ») Par le biais des diverses situations additives (Vergnaud, 1985), le nombre permet alors des opérations.
- **« mettre en œuvre le langage mathématique** » (champ 5), cet aspect de la symbolisation et des formes d'écriture est beaucoup travaillé à l'école mais recèle des difficultés conceptuelles à ne pas négliger (Numa Bocage, 1997).

[1] Recherche menée par l' EA 2305 « Cognition, Raisonnement et Didactique » de Paris 8.

Les maîtresses des deux classes, formées à l'IUFM, avaient trois ans d'ancienneté et utilisaient le même manuel de mathématiques. En début d'année, elles nous ont indiqué quelques élèves qu'elles considéraient comme « bon » « moyen » et « faible » ; ces élèves ont été plus particulièrement observés.

Résultats d'ensemble:

Ici, nous nous limiterons à une étude quantitative des résultats en terme de « réussite » et « échec » d'abord globalement puis selon l'analyse statistique[2] afin de repérer des formes variées de conceptualisation et définir des « familles d'élèves » pour mieux comprendre l'hétérogénéité.

Comparaison entre la classe ZEP et la classe non-ZEP

Dans l'ensemble, il n'y a pas de différences significatives entre les deux écoles à l'exception de quelques items dans le pré-test et post-test dont nous ne parlerons pas ici.
La suite des résultats se fera en groupant les deux classes, dont les différences sur le plan socio-économique n'étaient pas très contrastées.

Évolution des réussites par champ entre le début du CP (T1) et la fin de CP (T2)

Nous observons, pour chaque champ, une augmentation de la fréquence moyenne des réussites entre pré-test et post-test (0,58 au pré-test et de 0,76 au post-test) et une homogénéisation des résultats (diminution écarts types en fin d'année) à l'exception du champ 4b (résolution de problèmes de comparaison).
Nous constatons :

- les " grands progrès " sur *la connaissance des aspects conventionnels du langage numérique* (champ 5, T1 *réussi à 77%* – T2 réussi *à 95%*) et sur *l'acquisition de certaines propriétés de la suite numérique* (champ 1 *T1 =78% ;* T2=*94%*) ;
- la difficulté *à conceptualiser la propriété opératoire du nombre et donc à résoudre des problèmes* (champs 4a T1=*44% T2=73%* et 4b T1=*35% T2= 46%)*
- les évolutions dans le *dénombrement* (champ 2 T1=*61% T2=73%*) et dans les *procédures de comparaison des cardinaux de deux ensembles* (champ 3 T1=*56% T2=77%*).

Malgré ces pourcentages montrant un progrès, l'écart type à l'intérieur de chaque champ traduit une disparité entre les élèves. Le rapport personnel à la numération de ces élèves est l'un des facteurs pouvant expliquer cette disparité.

Analyse de l'hétérogénéité conceptuelle : les familles d'élèves

Un test statistique appliqué à nos résultats permet de dégager une typologie des élèves en 6 groupes appelés « familles » selon leurs compétences de début et/ou de fin de CP.

---

[2] une classification ascendante hiérarchique sur les coordonnées factorielles Les traitements statistiques et informatiques sont faits à l'aide de deux logiciels [SAS (SAS-Institute) et SPAD (DECISIA)].

Description des familles

Certaines familles (les trois premières) se définissent surtout par des niveaux de réussite supérieure à la moyenne alors que les trois dernières se définissent surtout par une moins bonne réussite que la moyenne.

Famille 1 : (soit 33% de l'effectif global). Ces enfants réussissent mieux que la moyenne au post-test sur le langage mathématique Par ailleurs dans les autres champs, ils ont un profil proche de l'élève « moyen ».

Famille 2 (soit 18,2% de l'effectif). Ils se ressemblent par leur réussite au post-test sur le dénombrement. Pour eux, leurs techniques de dénombrement sont très efficaces. Globalement leur profil est celui d'élèves « moyen bons » car, la numération, tout en étant majoritairement conçue comme un travail sur le dénombrement, prend aussi du sens dans les autres situations mathématiques.

Famille 3 : (soit 18,2%). Ils se signalent par des réussites très largement au dessus de la moyenne à T1 : sur la chaîne numérique, les situations additives (champ 4A et 4B) et le langage mathématique et à T2 :les situations additives (champ 4A et champ 4B). Pour ces enfants, identifiés comme « bons » par les maîtresses, le nombre revêt une dimension opératoire puisqu'il ne sert pas uniquement à compter mais aussi à résoudre des problèmes. Ce sont des élèves réussissant particulièrement bien l'ensemble de l'épreuve.

Famille 4 : (soit 6%), qui réussissent moins bien que les autres le dénombrement à T1 et le langage mathématique à T2. Ils se signalent plutôt par une moins bonne réussite générale que les autres enfants.

Famille 5 : (soit 6%). À T1 et T2 2élèves présentent des faiblesses sur la chaîne numérique en T1 et encore un peu en T2. De plus elles sont en difficulté dans le langage mathématique à T1.

Famille 6 (soit 18,2%), ayant en commun une faiblesse à T1 et T2 sur la comparaison de collections, les situations additives. De plus à T2 ils réussissent moins bien que la moyenne sur la chaîne numérique. L'échec observé sur la comparaison de collections repose plutôt sur un jugement de valeur (souvent sans dénombrement ou avec erreur) et il semble que l'aspect perceptif (« visuel ») soit pour ces élèves un critère important. De plus l'échec apparaît principalement sur des situations éloignées des situations scolaires habituelles. Ainsi, ces élèves ont des résultats très irréguliers, se caractérisant plutôt par des échecs sans pour autant être catégorisés « faibles » par les enseignantes. Pour eux les nombres servent surtout à dénombrer ou représenter une seule collection

Évolution des élèves au sein de chaque famille

Si l'on observe la répartition des élèves repérés comme bons, moyens ou faibles par les enseignantes, on s'aperçoit que :

- les **bons** élèves sont (à une exception près) tous dans une seule et même famille (3). Ce sont des élèves qui ont développé toutes les dimensions du nombre et principalement le nombre pour résoudre des problèmes.

- Les élèves « **moyens** » se trouvent dans 4 familles (1,2,4 et 6) ; leur rapport à la numération est très différent :
    - la dimension de la cardinalisation est dominante avec des procédures expertes quant au dénombrement mais n'empêche pas la réussite dans tous les autres champs (famille 2),
    - les nombres sont principalement pensés à travers le système oral et écrit de la numération, mais les autres champs restent correctement réussis. Pour ces enfants les nombres servent à calculer et dénombrer et sont proches des situations scolaires (famille 1)
    - pour certains le nombre sert uniquement à dénombrer sans pour autant que leurs procédures de dénombrement soit toujours efficaces selon les items. Les critères contextuels (figuratif ou visuel) l'emportent sur les procédures de quantification et d'opération rendant leurs procédures dépendantes de chaque situation, ils sont donc aléatoires et non opératoires (famille6)
    - pour d'autres le nombre est vu plutôt dans son aspect ordinal mais avec des difficultés sur le dénombrement et le langage mathématique
- Les élèves dits **faibles** sont pour certains dans la famille 1 avec une large majorité d'enfant dits « moyens ». Dans la famille 5 les deux enfants, signalées « faibles » ont donc des défaillances importantes à l'entrée du CP sur des activités très travaillées à l'école maternelle se caractérisent par une faiblesse générale sur l'ensemble des champs, nous pouvons même dire qu'elles sont atypiques.

Si à l'intérieur des familles, nous pouvons dégager une conception particulière du nombre, malgré les ressemblances évoquées, les élèves ont des trajectoires différentes. Certains semblent mieux tirer partis des séances didactiques que d'autres.

Conclusion

Sur notre population, l'hétérogénéité des élèves ne s'explique pas par le fait d'être en ZEP ou Non ZEP mais s'explique par:

- les différences inter-familles: certains champs sont plus ou moins bien réussis aux pré et post-test. Différentes conceptions (les nombres pour compter, les nombres pour résoudre des problèmes) sont distinguées.
- des variations intra-famille, certains enfants tirant mieux partie des situations d'apprentissage sur un même champ ; d'autres au contraire, réorganisant leurs conceptions numériques entre deux champs.

L'identification et la connaissance de cette hétérogénéité des représentations du nombre permet de mieux comprendre certaines des difficultés des enseignants à faire évoluer les compétences numériques des élèves. Comprendre les niveaux de conceptualisation aiderait probablement à mieux adapter et différencier les séances didactiques (Numa-Bocage & Larere, à paraître).

Bibliographie :

Brousseau G., (1995), Qu'est-ce que faire des Mathématiques ? Les mathématiques à l'école. *Bulletin APMEP*, N° 400 Septembre 1995, 831-850.

Fuson, K. (1991) *Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de deux à huit ans.* In J. Bideaud, C. Méljac & J.-P Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre*. Lille: PUL.

Numa-Bocage, L. (1997) *Etude de la médiation dans l'enseignement de la numération*. Thèse de doctorat, ParisV.

Numa-Bocage, L.& Larere, C. (à paraître). Apprentissage du nombre au CP ; sur quelques difficultés de conceptualisation. Nouvelle revue de l'AIS, Suresnes.

Vergnaud, G. (1985) ; Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Psychologie française, 30, 245-252.