7048

Vecteur, objet d'enseignement multiple

Sandra Patonnier

Quels sont les modèles que les enseignants de sciences ont des notions qu'ils abordent et du travail des élèves ? En quoi ces modèles influencent-ils le travail de l'enseignant ? Le travail que je mène se centre sur l'exemple des vecteurs. Afin de répondre à ces questions, il est nécessaire dans un premier temps de savoir ce qu'est un vecteur. Les vecteurs sont des objets mathématiques et d'enseignements récents, ils ont été créés par les scientifiques pour pallier certaines difficultés rencontrées dans le domaine des nombres complexes, des nombres relatifs ou encore de la mécanique. Pour autant, ils sont aujourd'hui présents dans les programmes comme étant une notion à part entière, présents de la troisième à la terminale, et cela autant en mathématiques qu'en sciences physiques. Voyons alors brièvement quelle est leur histoire, l'évolution de leur représentation et notation ; puis, l'usage qui en est fait en mathématiques et en physique.

Etymologiquement, le mot vecteur vient du latin *vector* qui signifie passager et de *vehere* qui signifie transporter. Il faut préciser, de plus, que le terme de vecteur est un terme polysémique. En effet, en ouvrant un dictionnaire, au moins quatre définitions de vecteurs apparaissent. Prenons l'exemple du Petit Robert (2002), un vecteur peut être soit :

- un segment de droite orienté, formant un être mathématique, sur lequel on peut effectuer des opérations, en mathématiques ;
- un animal transmettant un agent infectieux d'un sujet à un autre, en biologie ;
- une chose ou personne qui sert d'intermédiaire ;
- ou bien encore un véhicule capable de transporter une charge nucléaire, dans le domaine militaire.

L'origine du calcul vectoriel remonte à plus de 300 ans, et cela, en raison de trois principaux facteurs. Tout d'abord, l'étude des solutions des équations du $3^{ème}$ degré a conduit les mathématiciens à utiliser des racines carrées négatives, encore appelées « nombres imaginaires » par Bombelli en 1572. Ces nombres ont été utilisés comme artifice de calcul pendant près de 200 ans, puis ils ont conduit les mathématiciens à voir un sens sur une droite et donc des « segments orientés dans le plan » (notamment avec Argand en 1806). De plus, Leibniz à la fin du XVII^{ème} siècle critiqua la géométrie cartésienne, il voulait un calcul opérant directement sur les figures, et non des intermédiaires algébriques étrangers à la géométrie. Enfin, la dernière raison, même indirecte (Pressiat, 1999), qui peut être considérée comme une des origines du calcul vectoriel, est le développement de l'étude des mouvements par Newton (1726) qui comprend le caractère vectoriel des notions de vitesse et d'accélération (pour lui, la vitesse peut varier de deux façons : en intensité et en direction).

A la fin du XIX^{ème} siècle, Hamilton en travaillant sur la théorie des nombres complexes a développé la théorie des quaternions et ainsi, il a défini pour la première fois un vecteur en 1843 : un vecteur est une partie d'un quaternion, la partie qui caractérise la direction d'une droite orientée. Un vecteur est donc considéré comme « une ligne droite AB qui a non seulement une longueur et une direction.[…] Un vecteur est conçu pour être (ou pour construire) la différence entre ces deux points ; ou, plus précisément, pour résulter de la soustraction de sa propre origine avec sa propre extrémité » (Hamilton, 1899,p.9). Au même moment, mais indépendamment des travaux de Hamilton, l'allemand Grassmann a également développé une partie du calcul vectoriel, à partir de ses travaux sur la théorie des marées, en travaillant notamment sur la reformulation de ce que l'on nomme aujourd'hui la relation de Chasles, et sur la possibilité de donner un sens à une droite.

Peu à peu, les scientifiques vont montrer qu'il existe un lien entre les vecteurs et la physique. C'est notamment le cas de Tait, en 1882, qui a été l'un des premiers, à montrer ces liens entre la théorie des quaternions, et de ce fait les vecteurs, et la physique (cinématique, dynamique et électrodynamique). C'est ainsi, que les objets physiques, tels que la vitesse, l'accélération, les forces sont alors représentés sous la forme de vecteurs et que toutes les propriétés des vecteurs sont appliquées à ces objets (notamment pour la résultante de deux forces qui reprend la règle du parallélogramme sous sa forme vectorielle). Par ailleurs, les vecteurs sont d'abord apparus dans l'enseignement de la mécanique dès 1902, puis dans l'enseignement de la géométrie en 1905.

Enfin, aux alentours de 1930, les mathématiciens ont étendu le calcul vectoriel à la théorie des espaces vectoriels. Cette théorie est, depuis, devenue un des fondements des mathématiques, puisqu'une grande partie de ce que l'on appelle la topologie s'appuie sur les espaces vectoriels.

Au cours de ce développement de la théorie des espaces vectoriels, les systèmes symboliques représentant les vecteurs, ainsi que les définitions, ont évolué. En effet, lorsque Hamilton définit pour la première fois ce qu'est un vecteur, la notation utilisée alors pour représenter un vecteur était A – B, ou bien encore $\overline{AB}$. Cette notation était déjà utilisée par Argand à la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et elle sera reprise par de nombreux mathématiciens, dont Tait en 1882, et cela va durer jusque dans les années 1940. De plus, les représentations graphiques des vecteurs sont de simples segments de droite, sans flèche. Ce n'est qu'à partir de la moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, après la seconde guerre mondiale, que les notations vectorielles actuelles des vecteurs, c'est-à-dire la notation fléchée $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en mathématiques et $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ en physique, se sont imposées. Cette notation fut d'abord adoptée par les physiciens, puis en mathématiques à partir de 1960, même si Stevin, à la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, utilisait déjà une représentation fléchée des forces. Aujourd'hui, les représentations graphiques des vecteurs sont données sous la forme de segment de droite fléché à l'extrémité, et ils sont notés, dès la classe de troisième, par les notations $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{u}}$, où $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{u}}$.

Les vecteurs ont donc, de par leur histoire, connu une évolution de leurs notations et de leurs représentations. Aujourd'hui, abordés dans plusieurs disciplines scientifiques, ils ne peuvent pourtant pas être considérés comme une notion n'ayant qu'une seule et même définition, qu'une seule et même utilisation, et qu'une seule et même représentation.

Les vecteurs sont enseignés dans différentes disciplines, notamment en mathématiques et en physique. On ne peut pas dire, pour autant, qu'il s'agisse de la même notion. En effet, Dorier (2000) distingue les vecteurs mathématiques, géométriques (ceux qui sont utilisés au collège) ou algébriques (les éléments d'un espace vectoriel), des vecteurs physiques. Un vecteur mathématique est généralement défini par trois caractéristiques (norme, sens et direction), alors qu'un vecteur physique est défini, lorsqu'il s'agit d'une force, non seulement par ces trois caractéristiques, mais également par son point d'application (c'est ce que l'on appelle un vecteur lié), ou encore un vecteur dont le point d'application se déplace sur une droite (il s'agit d'un vecteur glissant représentant la vitesse). Ainsi, lorsque les élèves travaillent sur les forces, en physique, certains n'arrivent pas à se détacher des définitions données en cours de mathématiques ; ou encore, certains ne font pas le lien entre ces deux disciplines, ce qui peut les conduire à ne considérer qu'une caractéristique des forces pour déterminer l'égalité de deux forces (cf. Genin, Michaud-Bonnet et Pellet, 1987). De plus, il est difficile pour les élèves de prendre en compte, en mathématiques, les trois caractéristiques qui définissent un vecteur, souvent sens et direction sont confondus, et en physique seule l'intensité, ou le norme du vecteur est prise en compte.

Non seulement, les vecteurs ont des définitions différentes selon les disciplines, mais à l'intérieur d'une même discipline, ils peuvent avoir plusieurs types de représentations sémiotiques. Ce terme, dû à Duval (1995), a été repris par M. Bittar dans sa thèse en 1998. Pour Duval (1995), les représentations sémiotiques sont « relatives à un système particulier de signes, le langage, l'écriture algébrique ou les graphes cartésiens, et elles peuvent être converties en des représentations « équivalentes » dans un autre système sémiotique, mais pouvant prendre des significations différentes pour le sujet qui les utilise » (p.17). Pour Bittar, il existe quatre types de représentations sémiotiques dans le cas des vecteurs :

- le registre de l'écriture symbolique vectorielle (avec les notations $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$),
- le registre de la langue naturelle,
- le registre graphique (lorsque le vecteur est représenté par une flèche ou par un segment fléché sur un parallélogramme),
- et enfin, le registre géométrique numérique (lorsque la notation du vecteur se fait par ses coordonnées, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$).

Ces différentes représentations d'un même objet qu'est le vecteur peuvent amener les élèves à faire certaines confusions. Par exemple, ils peuvent avoir tendance à confondre un vecteur avec son représentant. C'est le cas, lorsque l'on aborde le repérage dans le plan. En effet, de nombreux élèves écrivent $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, or on ne peut pas dire cela, dans la mesure où un vecteur est défini par un sens, une direction et une longueur, les coordonnées permettent de représenter sur un repère un vecteur $\overrightarrow{AB}$, or elles sont indépendantes du représentant choisi.

Les vecteurs ont, de plus, un statut qui peut être différent dans une même discipline. En effet, les vecteurs sont à la fois des objets et des outils mathématiques. Selon les définitions de R. Douady (1986, p.9) : « Un concept est un outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. (…) Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement ». Ainsi, le vecteur peut être considéré comme un objet, lorsqu'il est directement un objet d'étude, c'est le cas lorsque l'on demande de démontrer que deux vecteurs sont égaux, ou bien que deux vecteurs sont colinéaires. En revanche, le vecteur est considéré comme un outil, lorsqu'il est utilisé comme simple outil de résolution de problèmes. Par exemple, démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme revient à démontrer que deux vecteurs sont égaux ; de même démontrer que 3 points sont alignés, que deux droites sont parallèles, qu'un quadrilatère est un trapèze, reviennent à démontrer la colinéarité de deux vecteurs. Aujourd'hui, les vecteurs sont davantage présentés aux élèves en tant qu'outils afin de résoudre des problèmes géométriques ou algébriques. Prenons l'exemple du manuel Déclic de Seconde : sur 30 exercices sur la colinéarité, seuls 8 d'entre eux font intervenir les vecteurs en tant qu'objet mathématique, c'est-à-dire des exercices où il est explicitement demandé de démontrer la colinéarité de deux vecteurs. L'attention est peu focalisée sur leur aspect objet, toutefois les vecteurs font partie intégrante de l'édifice mathématique. Il peut alors être difficile pour des élèves de mobiliser leurs connaissances sur les vecteurs afin de résoudre un problème où le vecteur a un statut d'outil, ils peuvent manquer de savoir-faire (Bittar, 1998).

Une des questions qui se pose est de savoir comment les enseignants prennent en compte toutes ces différences dans leur enseignement. En effet, comment sont prises en compte les difficultés des élèves, les différents registres de représentations, les différentes définitions, les différents statuts des vecteurs dans la préparation de leurs cours, dans le choix des exercices ? De plus, comment les élèves réagissent en fonction de ces différences : existe-t-il un cloisonnement entre les disciplines ? Est-ce que le statut du vecteur (objet vs outil) entraîne lui aussi des difficultés de résolution de problèmes ? Par le biais d'un questionnaire, nous chercherons à savoir comment les enseignants perçoivent le travail des élèves sur les vecteurs et comment cette perception peut influencer leur travail.

Références bibliographiques :

Bittar, M. (1998). *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Aspects outil et objet dans les manuels. Etude de difficultés d'élèves dans 2 environnements : papier-crayon et Cabri-Géomètre II.* Thèse de Doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble I.

Dorier, J.L. (2000). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspectives théoriques sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz n°12.*

Douady, R.(1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 7(2). 5-31.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel.* Berne : Peter Lang.

Genin, C., Michaud-Bonnet, J. et Pellet, A. (1987). Représentation des élèves en mathématiques et en physique sur les vecteurs et les grandeurs vectorielles lors de la transition collège-lycée. *Petit x*. 14-15, 39-63.

Hamilton,W.R. (1899). *Elements of quaternions*. Volume 1. London : Longmans, Green and Co.

Newton, I. (1726). *Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Tome II*. Paris : Desaint et Saillant.

Pressiat, A. (1999). *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs ».* Thèse de Doctorat. Université Paris VII.

Tait (1882). *Traité élémentaire des quaternions*. Paris : gauthier-Villars